1778

De figura apparente annuli Saturni pro eius loco quocunque respectu terrae. Auctore L. Eulero

Leonhard Euler

DE FIGVRA APPARENTE ANNVLI SATVRNI PRO EIVS LOCO QVOCVNQVE RESPECTV TERRAE.

Auctore
L. EVLERO.

§. 1.

Concipiamus Saturnum in ipso plano eclipticae moueri; nam quoniam eius latitudo perpetuo est valde parua, eius declinatio ab hoc plano vix quicquam in apparentia annuli mutare poterit. Referat igitur planum tabulae ipsam eclipticam, in qua C sit centrum Saturni, et recta ACB sit intersectio annuli Saturni cum ecliptica, cuius diameter per ipsam hanc rectam AB repraesentetur, voceturque radius $CA = CB = 1$. Deinde quia annulus ad eclipticam inclinatur sub angulo circiter 31 graduum, quem vocemus $= i$, repraesentet semicirculus AMB semissem annuli, in quo consideretur punctum quodcunque M, voceturque angulus $ACM = \Phi$; hincque ex M ducto ad AB perpendiculo MP, erit $MP = \sin.\Phi$ et $CP = \cos.\Phi$. Porro ex M ad planum eclipticae ducatur perpendiculum MR, et ob angulum $MPR = i$ erit $MR = \sin.\Phi \sin i$ et $PR = \sin.\Phi \cos.i$.

Tab. X. Fig. 2.

§. 2. Versetur nunc Terra vbicunque in T, et ad eius locum ducatur ex C recta CT, et vocetur angulus $ACT = \gamma$. Tum quia distantia Terrae quasi est infinita, huic rectae CT constituatur planum normale, quod simul ad eclipticam erit perpendiculare eamque secabit secundum rectam CQ; ita vt angulus TCQ sit rectus, ideoque angulus

Fig. 3.

gulus $ACQ = 90° - \gamma$. Iam ad hanc CQ ex R ducatur normalis RQ, et ex Q erigatur perpendiculum ad eclipticam $QS = RM$, eritque S proiectio puncti M in planum CQS facta. Tota autem haec proiectio ex omnibus punctis M orta dabit figuram, sub qua annulus spectatori in Terra posito apparebit.

§. 3. Pro hac igitur proiectione inuestiganda vocetur abscissa $CQ = x$ et applicata $QS = y$, et quia erat $PR = \sin.\Phi \cos.i$, $RM = \sin.\Phi \sin.i$ et $CP = \cos.\Phi$, statim erit $y = \sin.\Phi \sin.i$. Iam ex puncto P ad rectam CQ agatur normalis PV, eritque $CV = \cos.\Phi \sin.\gamma$ et $PV = \cos.\Phi \cos.\gamma$. Tum vero ex R ad PV ducatur normalis RU, et ob angulum $RPU = 90° - \gamma$ erit

$$PU = \sin.\Phi \cos.i \sin.\gamma \text{ et } RU = \sin.\Phi \cos.i \cos.\gamma = QV,$$

vnde fit

$$CQ = x = \cos.\Phi \sin.\gamma + \sin.\Phi \cos.i \cos.\gamma.$$

Tota igitur quaestio reducitur ad inuentionem curuae sub coordinatis $CQ = x = \cos.\Phi \sin.\gamma + \sin.\Phi \cos.i \cos.\gamma$ et $QS = y = \sin.\Phi \sin.i$ contentae.

§. 4. Facile autem patet, si angulus Φ eliminetur, prodituram esse aequationem inter x et y secundi gradus, ita vt haec curua sit sectio conica. Cum enim sit $\sin.\Phi = \frac{y}{\sin.i}$, erit $\cos.\Phi = \frac{\sqrt{\sin.i^2 - yy}}{\sin.i}$, vnde oritur aequatio Tab. X. Fig. 4.

$$x = \frac{\sin.\gamma \sqrt{\sin.i^2 - yy}}{\sin.i} + \frac{y \cos.\gamma}{\tang.i},$$

quae ad rationalitatem perducta abit in hanc:

$$xx - \frac{2xy\cos.\gamma}{\tang.i} + \frac{yy\cos.\gamma^2}{\tang.i^2} = \frac{\sin.\gamma^2(\sin.i^2 - yy)}{\sin.i^2}, \text{ siue}$$

$$0 = xx\sin.i^2 - 2xy\sin.i\cos.i\cos.\gamma + yy(1 - \cos.\gamma^2\sin.i^2) - \sin.\gamma^2\sin.i^2.$$

§. 5. Cum igitur curua quaesita manifesto sit ellipsis, imprimis necesse erit, tam positionem quam quantitatem eius axium determinandi; quod quo facilius fieri possit, ponamus

mus breuitatis gratia $x = a \cos.\Phi + b \sin.\Phi$ et $y = c \sin.\Phi$, ita vt sit $a = \sin.\gamma$, $b = \cos.\gamma \cos.i$ et $c = \sin.i$, hincque ducta recta CS erit

$$CS = xx + yy = a^2 \cos.\Phi^2 + 2ab \sin.\Phi \cos.\Phi + (b^2 + c^2) \sin.\Phi^2.$$

Constat autem punctum S ibi in alterutrum axem incidere, vbi haec formula valorem sortietur vel maximum vel minimum; quamobrem differentiale huius CS^2 nihilo aequetur, vnde oritur haec aequatio:

$$-aa \sin.\Phi \cos.\Phi + ab \cos.\Phi^2 - ab \sin.\Phi^2 + (bb + cc) \sin.\Phi \cos.\Phi = 0.$$

Est vero $\sin.\Phi \cos.\Phi = \frac{1}{2} \sin.2\Phi$ et $\cos.\Phi^2 - \sin.\Phi^2 = \cos.2\Phi$, vnde fit $\frac{(bb + cc - aa)}{2} \sin.2\Phi + ab \cos.2\Phi = 0$, vnde elicitur $\text{tang.}\,2\Phi = \frac{2ab}{aa - bb - cc}$. Substitutis iam pro a, b, c valoribus habebitur $\text{tang.}\,2\Phi = \frac{2 \sin.\gamma \cos.\gamma \cos.i}{\sin.\gamma^2 \cos.i^2 - \cos.\gamma^2}$.

§. 6. Ad binos igitur valores anguli Φ inueniendos, quaeratur angulus α, vt sit $\text{tang.}\,\alpha = \frac{2ab}{aa - bb - cc}$, et cum haec fractio etiam sit $= \text{tang.}(180^\circ + \alpha)$, erit tam $2\Phi = \alpha$, quam $2\Phi = 180^\circ + \alpha$, ideoque vel $\Phi = \frac{1}{2}\alpha$ vel $\Phi = 90^\circ + \frac{1}{2}\alpha$. Quod si iam alteruter horum duorum valorum $\frac{1}{2}\alpha$ et $90^\circ + \frac{1}{2}\alpha$ loco Φ substituatur, tum fractio $\frac{y}{x} = \frac{c \sin.\Phi}{a \cos.\Phi + b \sin.\Phi}$ dabit tangentem anguli, sub quo alter ellipseos axis ad rectam CQ inclinatur; recta autem $CS = \sqrt{xx + yy}$ dabit semissem huius axis, cui alter in C normaliter est iungendus; quandoquidem facile patet, punctum C esse centrum huius ellipsis. Verum quia ex valore pro $\text{tang.}\,2\Phi$ invento tam $\sin.\Phi$ quam $\cos.\Phi$ ad formulas valde intricatas perducerent, inuestigationem axium alia via instituamus.

Tab. X. Fig. 5. §. 7. Quoniam recta CD, ad quam ellipsin quaesitam referimus, est in ipso plano eclipticae et ad rectam CT normalis, ipsa autem figura plano eclipticae normaliter insistere est concipienda, referat recta CT alterutrum ellip-

ellipseos semiaxem, pro cuius positione ponamus angulum DCF $= \zeta$, et ducta normali SX vocemus pro ipso hoc axe CF abscissam CX $=$ X et applicatam XS $=$ Y; ac facile patet fore

$$X = x \operatorname{cof.} \zeta + y \operatorname{fin.} \zeta \quad \text{et} \quad Y = y \operatorname{cof.} \zeta - x \operatorname{fin.} \zeta$$

vnde valoribus loco x et y substitutis erit

$$X = a \operatorname{cof.} \zeta \operatorname{cof.} \Phi + (b \operatorname{cof.} \zeta + c \operatorname{fin.} \zeta) \operatorname{fin.} \Phi$$

$$Y = (c \operatorname{cof.} \zeta - b \operatorname{fin.} \zeta) \operatorname{fin.} \Phi - a \operatorname{fin.} \zeta \operatorname{cof.} \Phi$$

pro quibus voloribus breuitatis gratia scribamus

$$X = A \operatorname{cof.} \Phi + B \operatorname{fin.} \Phi \quad \text{et} \quad Y = C \operatorname{cof.} \Phi + D \operatorname{fin.} \Phi.$$

§. 8. Iam quia per hypothesin recta CF est semiaxis ellipsis, aequatio inter X et Y necessario habebit talem formam: $m X^2 + n Y^2 = K$; quamobrem, si in hac aequatione illi valores pro X et Y substituantur, angulus variabilis Φ ex calculo excedere debet. Primo igitur necesse est, vt duplicia producta formae fin. Φ cof. Φ se mutuo tollant, vnde fieri oportet $2m AB + 2n CD = 0$, vnde ratio inter m et n colligitur. Erit scilicet $m : n = CD : -AB$; quamobrem nihil impedit, quo minus scribamus $m = CD$ et $n = -AB$ ita vt nostra aequatio sit

$$CD . X^2 - AB . Y^2 = K.$$

§. 9. Nunc igitur exclusis terminis formae fin. Φ. cof. Φ consideremus terminum formae cof. Φ^2, qui erit

$$(CD . A^2 - AB . C^2) \operatorname{cof.} \Phi^2 = AC (AD - BC) \operatorname{cof.} \Phi^2.$$

Simili modo terminus formae fin. Φ^2 prodibit

$$(CD . B^2 - AB . D^2) \operatorname{fin.} \Phi^2 = BD (BC - AD) \operatorname{fin.} \Phi^2.$$

Quo igitur angulus Φ ex aequatione exeat, necesse est vt sit

$$AC (AD - BC) = BD (CB C - AD)$$

siue

siue $AC = -BD$, vel etiam $AC + BD = 0$; tum enim erit

$$CD.X^2 - AB.Y^2 = AC(AD - BC) = BD(BC - AD) = K.$$

Sicque erit $K = AC(AD - BC)$, siue cum ex priore conditione sit $D = -\frac{AC}{B}$, erit $K = -\frac{AC^2}{B}(AA + BB)$.

§. 10. Hoc iam valore inuento longitudo semiaxium CF et CG facili negotio eruitur. Si enim ponatur $Y = 0$ valor ipsius X dabit longitudinem semiaxis CF, qui ergo, si ponatur $= F$, reperietur

$$CD.F^2 = -\frac{ACC(AA + BB)}{B} = -\frac{ACCF^2}{B},$$

vnde colligitur $F = \sqrt{AA + BB}$. Pro altero autem semiaxe, qui sit $CG = G$ et alteri CF normaliter iungitur, is reperietur ponendo $X = 0$ et $Y = G$, vnde ergo aequatio §. praec. fiet

$$-AB.G^2 = -\frac{ACC(AA + BB)}{B},$$

vnde concluditur

$$G = \frac{C}{B}\sqrt{AA + BB} = \sqrt{\left(\frac{AACC}{BB} + CC\right)}.$$

Quare cum sit $D = -\frac{AC}{B}$, erit quoque $G = \sqrt{CC + DD}$. Ceterum hic notetur esse $F : G = B : C$.

§. 11. Substituamus nunc loco litterarum A, B, C, D valores assumtos, eritque

$$AA + BB = (aa + bb)\operatorname{cos}.\zeta^2 + 2bc \operatorname{sin}.\zeta \operatorname{cos}.\zeta + cc \operatorname{sin}.\zeta^2.$$

Cum igitur sit $\operatorname{cos}.\zeta^2 = \frac{1 + 2\operatorname{cos}.2\zeta}{2}$, $\operatorname{sin}.\zeta^2 = \frac{1 - \operatorname{cos}.2\zeta}{2}$ et $2 \operatorname{sin}.\zeta \operatorname{cos}.\zeta = \operatorname{sin}.2\zeta$ erit

$$AA + BB = \frac{aa + bb + cc}{2} + bc \operatorname{sin}.2\zeta + \frac{aa + bb - cc}{2}\operatorname{cos}.2\zeta.$$

Simili modo reperiemus

$$CC + DD = \frac{aa + bb + cc}{2} - bc \operatorname{sin}.2\zeta - \frac{(aa + bb - cc)}{2}\operatorname{cos}.2\zeta.$$

Praeterea vero erit

$$F : G = (b \operatorname{cos}.\zeta + c \operatorname{sin}.\zeta) : (-a \operatorname{sin}.\zeta).$$

§. 12.

§. 12. Quod si porro loco litterarum a, b, c valores ante assumtos substituamus, reperietur

$$aa+bb+cc=1+\text{sin.}\,\gamma^2\,\text{sin.}\,i^2$$
$$aa+bb-cc=\text{cos.}\,i^2-\text{cos.}\,\gamma^2\,\text{sin.}\,i^2 \text{ et}$$
$$bc=\text{cos.}\,\gamma\,\text{sin.}\,i\,\text{cos.}\,i$$

quibus valoribus substitutis erit

$$F^2=\tfrac{1}{2}(1+\text{sin.}\,\gamma^2\,\text{sin.}\,i^2)+\text{cos.}\,\gamma\,\text{sin.}\,i\,\text{cos.}\,i\,\text{sin.}\,2\zeta$$
$$+\tfrac{1}{2}(\text{cos.}\,i^2-\text{cos.}\,\gamma^2\,\text{sin.}\,i^2)\,\text{cos.}\,2\zeta$$
$$G^2=\tfrac{1}{2}(1+\text{sin.}\,\gamma^2\,\text{sin.}\,i^2)-\text{cos.}\,\gamma\,\text{sin.}\,i\,\text{cos.}\,i\,\text{sin.}\,2\zeta$$
$$-\tfrac{1}{2}(\text{cos.}\,i^2-\text{cos.}\,\gamma^2\,\text{sin.}\,i^2)\,\text{cos.}\,2\zeta.$$

§. 13. Tantum igitur superest, vt angulum ζ definiamus, cuius valorem peti oportet ex aequatione $AC+BD=0$, quae, facta prima substitutione, induit hanc formam:

$$-aa\,\text{sin.}\,\zeta\,\text{cos.}\,\zeta+bc\,\text{cos.}\,\zeta^2+(cc-bb)\,\text{sin.}\,\zeta\,\text{cos.}\,\zeta-bc\,\text{sin.}\,\zeta^2=0 \text{ siue}$$
$$(aa+bb-cc)\,\text{sin.}\,\zeta\,\text{cos.}\,\zeta+bc(\text{sin.}\,\zeta^2-\text{cos.}\,\zeta^2)=0$$

quae aequatio manifesto reducitur ad hanc:

$$\tfrac{1}{2}(aa+bb-cc)\,\text{sin.}\,2\zeta=bc\,\text{cos.}\,2\zeta,$$

vnde deducitur

$$\text{tang.}\,2\zeta=\frac{2bc}{aa+bb-cc}.$$

Per alteram autem substitutionem habebitur

$$\text{tang.}\,2\zeta=\frac{2\,\text{cos.}\,\gamma\,\text{sin.}\,i\,\text{cos.}\,i}{\text{cos.}\,i^2-\text{cos.}\,\gamma^2\,\text{sin.}\,i^2}$$

ex qua aequatione pro ζ duo reperiuntur valores. Si enim quaeratur angulus β, vt sit

$$\text{tang.}\,\beta=\frac{2bc}{aa+bb-cc};$$

erit tam $\text{tang.}\,2\zeta=\text{tang.}\,\beta$ quam $\text{tang.}\,2\zeta=\text{tang.}\,(180^\circ+\beta)$, ideoque vel $\zeta=\tfrac{1}{2}\beta$ vel $\zeta=90^\circ+\tfrac{1}{2}\beta$.

§. 14. Cum ex aequatione primo inuenta sit

$$\tfrac{1}{2}(aa+bb-cc)\,\text{sin.}\,2\zeta=bc\,\text{cos.}\,2\zeta,$$

 operae

operae pretium erit annotaſſe, fore

$$\tfrac{1}{2}(aa+bb-cc)=\frac{bc\,\text{coſ.}\,2\zeta}{\text{ſin.}\,2\zeta}$$

ex quo valore deducimus

$$bc\,\text{ſin.}\,2\zeta+\tfrac{1}{2}(aa+bb-cc)\,\text{coſ.}\,2\zeta=\frac{bc}{\text{ſin.}\,2\zeta}$$

vnde valores ante inuenti ita ſuccinctius exprimentur:

$$FF=\tfrac{1}{2}(aa+bb+cc)+\frac{bc}{\text{ſin.}\,2\zeta}$$

$$GG=\tfrac{1}{2}(aa+bb+cc)-\frac{bc}{\text{ſin.}\,2\zeta}$$

vnde poſtremi valores colliguntur fore

$$FF=\tfrac{1}{2}(1+\text{ſin.}\,\gamma^2\,\text{ſin.}\,i^2)+\frac{\text{coſ.}\,\gamma\,\text{ſin.}\,i\,\text{coſ.}\,i}{\text{ſin.}\,2\zeta}$$

$$GG=\tfrac{1}{2}(1+\text{ſin.}\,\gamma^2\,\text{ſin.}\,i^2)-\frac{\text{coſ.}\,\gamma\,\text{ſin.}\,i\,\text{coſ.}\,i}{\text{ſin.}\,2\zeta}$$

ſicque tantum opus eſt vt valorem pro $\text{ſin.}\,2\zeta$ eruamus.

§. 15. Quoniam igitur inuenimus

$$\text{tang.}\,2\zeta=\frac{2bc}{aa+bb-cc},\ \text{erit}$$

$$\text{ſin.}\,2\zeta=\frac{2bc}{\sqrt{4bbcc+(aa+bb-cc)^2}}\ \text{ſiue ob}$$

$$(aa+bb-cc)^2=(aa+bb+cc)^2-4(aa+bb)cc\ \text{erit}$$

$$\text{ſin.}\,2\zeta=\frac{2bc}{\sqrt{(aa+bb+cc)^2-4aacc}}$$

At introducendo denuo angulos γ et i, cum ſit

$$aa+bb+cc=1+\text{ſin.}\,\gamma^2\,\text{ſin.}\,i^2\ \text{et}\ 2ac=2\,\text{ſin.}\,\gamma\,\text{ſin.}\,i$$

manifeſtum eſt fore

$$(aa+bb+cc)^2-4aacc=1-2\,\text{ſin.}\,\gamma^2\,\text{ſin.}\,i^2+\text{ſin.}\,\gamma^4\,\text{ſin.}\,i$$
$$=(1-\text{ſin.}\,\gamma^2\,\text{ſin.}\,i^2)$$

His autem valoribus ſubſtitutis colligitur

$$F^2=\tfrac{1}{2}(1+\text{ſin.}\,\gamma^2\,\text{ſin.}\,i^2)+\tfrac{1}{2}(1-\text{ſin.}\,\gamma^2\,\text{ſin.}\,i^2)=1$$

$$G^2=\tfrac{1}{2}(1+\text{ſin.}\,\gamma^2\,\text{ſin.}\,i^2)-\tfrac{1}{2}(1-\text{ſin.}\,\gamma^2\,\text{ſin.}\,i^2)=\text{ſin.}\,\gamma^2\,\text{ſin.}\,i^2$$

ita vt ipſi ſemiaxes ſint, maior $CF=F=1$, ideſt ſemi diametro annuli aequalis; minor vero $CG=G=\text{ſin.}\,\gamma\,\text{ſin.}\,i$ ſiue, ob inclinationem propemodum $=30^\circ$, erit $G=\tfrac{1}{2}\,\text{ſin.}\,\gamma$

Vnde

Vnde patet, ſi fuerit angulus ACT $= \gamma = 0$, quod euenit quando Terra in ipſo plano annuli verſatur, tum axem minorem euaneſcere et annulum ſub forma lineae rectae, ad eclipticam ſub angulo $\zeta = i$ inclinatae, fore apparitu- rum. Sin autem angulus γ fuerit rectus, tum ſemiaxis minor erit $= \text{ſin.}\, i = \frac{1}{2}$ propemodum.

§. 16. Deinde quod ad poſitionem horum axium attinet, quoniam inuenimus

$$\text{ſin.}\, 2\zeta = \frac{2bc}{\sqrt{4bbcc + (aa + bb - cc)^2}} = \frac{2\,\text{cof.}\,\gamma\,\text{ſin.}\,i\,\text{cof.}\,i}{1 - \text{ſin.}\,\gamma^2\,\text{ſin.}\,i^2}$$

$$\text{cof.}\, 2\zeta = \frac{aa + bb - cc}{\sqrt{4bbcc + (aa + bb - cc)^2}} = \frac{\text{cof.}\,i^2 - \text{cof.}\,\gamma^2\,\text{ſin.}\,i^2}{1 - \text{ſin.}\,\gamma^2\,\text{ſin.}\,i^2}$$

inde colligitur

$$1 - \text{cof.}\, 2\zeta = \frac{2\,\text{ſin.}\,i^2\,\text{cof.}\,\gamma^2}{1 - \text{ſin.}\,\gamma^2\,\text{ſin.}\,i^2} \text{ et}$$

$$1 + \text{cof.}\, 2\zeta = \frac{2\,\text{cof.}\,i^2}{1 - \text{ſin.}\,\gamma^2\,\text{ſin.}\,i^2}.$$

Quare cum ſit

$$\text{ſin.}\,\zeta = \sqrt{\frac{1 - \text{cof.}\,2\zeta}{2}} \text{ et } \text{cof.}\,\zeta = \sqrt{\frac{1 + \text{cof.}\,2\zeta}{2}},$$

hinc reperietur

$$\text{ſin.}\,\zeta = \frac{\text{cof.}\,\gamma\,\text{ſin.}\,i}{\sqrt{1 - \text{ſin.}\,\gamma^2\,\text{ſin.}\,i^2}} \text{ et } \text{cof.}\,\zeta = \frac{\text{cof.}\,i}{\sqrt{1 - \text{ſin.}\,\gamma^2\,\text{ſin.}\,i^2}}$$

conſequenter $\text{tang.}\,\zeta = \text{cof.}\,\gamma\,\text{tang.}\,i$. Sicque innoteſcit angulus ACF, ſub quo axis maior ellipſis ad rectam CD, hoc eſt ad eclipticam, inclinatur, qui ergo ſemper minor eſt angulo i, excepto ſolo caſu quo $\gamma = 0$, vbi fit $\zeta = i$. Iam autem notauimus, hoc caſu annulum ſub figura lineae rectae apparere.

§. 17. Euolutio huius problematis maxime eſt memorabilis, propterea quod per calculos non parum moleſtos tandem deducti ſumus ad ſolutionem ſimpliciſſimam; vnde nullum eſt dubium, quin alia via multo planior detur, ad eandem ſolutionem perueniendi, quod quidem facile praeuidere licuiſſet; neque tamen pigebit, iſtam ſolutionem

 euoluiſſe,

euoluiſſe, cum in ea inſignia calculi artificia occurrant, quae in aliis inueſtigationibus ſummum fructum afferre poterunt. Interim tamen adhuc aliam ſolutionem ſimpliciorem ſubiungamus, quae tam eſt plana et facilis, vt vix vllum calculum poſtulet.

Solutio facillima eiusdem quaeſtionis.

Tab. XI. Fig. 1. §. 18. Quemadmodum ante noſtram figuram in plano eclipticae deſcripſimus, ita nunc planum tabulae in plano annuli accipiatur. Referat igitur circulus centro C diametro A B deſcriptus ipſum annulum Saturni, ſitque recta C Q interſectio huius plani cum ecliptica, cuius inclinatio maneat vt vnte $= i$. Iam in plano eclipticae ſit punctum T locus Terrae, vnde ad planum annuli demittatur perpendiculum T P, et ex P ad lineam nodorum ducatur normalis P Q, ita vt ducta recta T Q angulus P Q T metiatur inclinationem $= i$. Ducatur porro recta T C, eritque angulus A C T in plano eclipticae, quem ante vocauimus $= \gamma$; vnde ſi ponamus diſtantiam Terrae a Saturno $TC = c$, erit recta $TQ = c \sin. \gamma$ et $CQ = c \cos. \gamma$. Hinc porro colligitur $TP = c \sin. \gamma \sin. i$ et $PQ = c \sin. \gamma \cos. i$.

§. 19. Vocemus autem porro angulum, ſub quo recta T C ad planum annuli inclinatur, hoc eſt, ducta recta C P, angulum $TCP = \eta$, eritque $\sin. \eta = \frac{TP}{CT} = \sin. \gamma \sin. i$. Ac ſi etiam vocemus angulum $PCQ = \zeta$, erit $\tang. \zeta = \frac{PQ}{CQ} = \cos. i \tang. \gamma$. Hinc duplici modo exprimi poteſt recta C P, cum ſit tam $CP = CT \cos. \eta$, quam $CP = \frac{PQ}{\sin. \zeta} = \frac{c \sin. \gamma \cos. i}{\sin. \zeta}$, quam ob rem erit $c \cos. \eta = \frac{c \sin. \gamma \cos. i}{\sin. \zeta}$, ſiue $\sin. \zeta \cos. \eta = \sin. \gamma \cos. i$. Vnde patet, quomodo hi anguli de nouo introducti ζ et η a binis datis γ et i pendeant, cum ſit $\tang. \zeta = \tang. \gamma \cos. i$ et $\sin. \eta = \sin. \gamma \sin. i$.

§. 20.

§. 20. Nunc igitur quaestio huc redit, sub quanam figura annulus sit appariturus oculo in puncto T constituto? quem in finem concipiatur conus scalenus, cuius vertex sit in T, basis vero sit ipse annulus Saturni, dum axis huius coni seu recta $TC = c$ ad planum basis inclinatur angulo $TCP = \eta$. Euidens autem est, hanc figuram prodire, si conus secetur plano ad axem TC normali. Hoc igitur planum annulum secabit sub recta ECF ad rectam TC normalem. Ipsum autem hoc planum inclinabitur ad basin sub angulo $= 90^\circ - \eta$. In hac ergo sectione insunt ambo puncta E et F, existente EF diametro annuli, cuius radium vocemus $CE = CF = a$. Quoniam autem axis coni quasi infinite magnus prae basi spectari poterit, sectionis quaesitae, quae vtique erit ellipsis, axis maior diametro annuli aequabitur, ita vt semiaxis maior sit $= a$.

§. 21. Pro altero axe inueniendo secetur conus noster scalenus plano ad axem perpendiculari et per CT transeunte secundum rectam CP, in quo plano ducatur recta CV ad CT normalis, quae ergo faciet angulum $VCG = 90^\circ - \eta$. Vnde si capiatur CG radio annuli aequalis $= a$, et ex G ad CV iterum ducatur normalis GH, manifestum est fore GH semiaxem minorem ellipsis quaesitae. Erit igitur $CH = a \sin. \eta$, ita vt iste semiaxis minor sit $CH = a \sin. \eta = a \sin. \gamma \sin. i$, prorsus vt ante inuenimus. Tab. XI. Fig. 2.

§. 22. Sin autem distantiam TC, siue axem coni respectu basis non tanquam infinitum spectare liceret, calculus aliquanto fieret prolixior. Huius igitur casus euolutionem hic in genere adiungamus. Referat ergo punctum O verticem coni, recta autem OC eius axem ad planum basis inclinatum sub angulo $ACO = \eta$; atque in hoc plano per OC ad planum basis normaliter constituto sit ACB dia- Fig. 3.

diameter basis, voceturque radius $CA = a$. Praeterea per C ad OC recta producatur normalis MCN, lateribus coni OA et OB occurrens in punctis M et N, et super hac recta MN constituatur planum ad rectam CO normale; atque definire oportebit sectionem coni, quam hoc planum producet, quandoquidem ista sectio exhibebit figuram, sub qua oculus in O basin coni spectabit; quae cum rectae MN normaliter insistat, applicata in puncto C erit radio basis aequalis, ideoque $= a$. Tum vero etiam euidens est, rectam MN fore axem minorem sectionis quaesitae, neque vero punctum C erit in eius centro, quia non in medio rectae MN existit.

§. 23. Ad hanc rectam MN inueniendam ex punctis A et B ad axem OC productum demittantur perpendicula AP et BQ, quibus ergo recta MN erit parallela. Cum iam sit $CA = CB = a$ et angulus $ACO = \eta$, erit $AP = a \sin.\eta = QB$ et $CQ = CP = a \cos.\eta$. Hinc ob triangula similia erit $OP : PA = OC : CM$, item $OQ : QB = OC : CN$; vnde ob $OP = c - a \cos.\eta$ et $OQ = c + a \cos.\eta$ colligitur fore $CM = \frac{ac \sin.\eta}{c - a \cos.\eta}$ et $CN = \frac{ac \sin.\eta}{c + a \cos.\eta}$. Sicque euidens est partes CM et CN inter se non esse aequales; at tota recta MN hinc prodit $= \frac{2acc \sin.\eta}{cc - aa \cos.\eta^2}$, quae cum sit axis minor, erit semiaxis minor $= \frac{acc \sin.\eta}{cc - aa \cos.\eta^2}$.

Tab. XI. Fig. 4. §. 24. Descripta iam sit super hac recta MN tanquam semiaxe minore ipsa ellipsis quaesita MDN, ita vt sit $MC = \frac{ac \sin.\eta}{c - a \cos.\eta}$ et $NC = \frac{ac \sin.\eta}{c + a \cos.\eta}$, ideoque punctum C extra centrum ellipsis situm. Nouimus autem in puncto hoc C applicatam CD esse $= a$. Nunc super diametro MN describatur semicirculus rectam CD in E secans, ita vt sit CE applicata in semicirculo, ideoque

$$CE = \sqrt{MC \cdot NC} = \frac{ac \sin.\eta}{\sqrt{cc - aa \cos.\eta^2}};$$

eritque ergo $CD : CE = \sqrt{cc - aa \cos.\eta^2} : c \sin.\eta$.

§. 25.

§. 25. Sit nunc c centrum tam circuli quam ellipſis, ita vt ſit $Mc = Nc = \frac{aac\,ſin.\,\eta}{cc - aa\,coſ.\,\eta^2}$. Vnde erigatur perpendicularis $c\,e\,d$, ita vt pariter ſit $ce = \frac{acc\,ſin.\,\eta}{cc - aa\,coſ.\,\eta^2}$. At vero recta cd erit verus ſemiaxis maior noſtrae ellipſis; quare cum ſit $CE:CD = ce:cd$, reperietur iſte ſemiaxis maior $cd = \frac{CD:ce}{CE} = \frac{ac}{\sqrt{cc - aa\,coſ.\,\eta^2}}$, dum ſemiaxis minor inventus eſt $= \frac{acc\,ſin.\,\eta}{cc - aa\,coſ.\,\eta^2}$.

§. 26. His definitis, ſi quis haeſitet magnitudinem annuli Saturni, cuius radium poſuimus $= a$, prae diſtantia Terrae a Saturno, quam vocauimus $= c$, tanquam euaneſcentem ſpectare, ei ita ſatisfacere poſſumus, vt dicamus, ellipſeos, ſub qua annulus ſit appariturus, ſemiaxem maiorem fore $= \frac{ac}{\sqrt{cc - aa\,coſ.\,\eta^2}}$, at vero ſemiaxem minorem $= \frac{acc\,ſin.\,\eta}{cc - aa\,coſ.\,\eta^2}$. Vnde ſtatim liquet, ſi a prae c negligatur, prodire ſemiaxem maiorem a, minorem vero $= a\,ſin.\,\eta$, prorſus vti ſupra inuenimus; vbi meminiſſe iuuabit, angulum η metiri eleuationem, ſub qua Terra ex Saturno ſpectata ſuper plano annuli eleuata apparere debet. Quare ſi Terra in ipſo plano annuli verſetur, erit angulus $\eta = 0$, tum igitur ſemiaxis maior erit $= \frac{ac}{\sqrt{cc - aa}}$, at vero minor $= 0$; ita vt annulus tanquam linea recta ſit appariturus, cuius longitudo $= \frac{2ac}{\sqrt{cc - aa}}$. Sin autem Terra maxime ſuper plano annuli fuerit eleuata, id quod euenit, quando $\eta = i$, quoniam propemodum $i = 30$ graduum, ſemiaxis maior ellipſis erit $= \frac{ac}{\sqrt{cc - \frac{3}{4}aa}}$, minor vero $= \frac{2acc}{4cc - 3aa}$. Hoc autem caſu annulus maximam amplitudinem habere videbitur. Ceterum prior ſolutio hac gaudet praerogatiua, quod ſtatim ſitum annuli reſpectu eclipticae exhibeat.

DE